

SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA DI MATEMATICA DELL'ESAME DI MATURITÀ

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario

Problema 1

Sia $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{|x| + 1}$, con $a \in \mathbb{R}$.

- Dimostra che, per qualsiasi valore di $a \in \mathbb{R}$, la funzione $f_a(x)$ è definita, continua e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostra poi che $f_a(x)$ ammette derivata seconda in $x = 0$ solo se $a = 0$.
- Determina, in funzione di a , le coordinate del punto A di intersezione tra gli asintoti del grafico di $f_a(x)$.

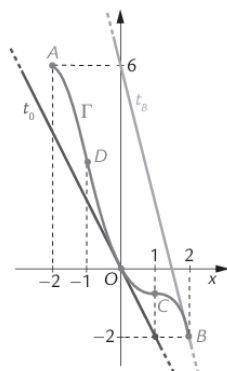
Poni ora $a = 2$.

- Completa lo studio di funzione di $f_2(x)$ e traccia il suo grafico. Stabilisci in particolare se il grafico di $f_2(x)$ presenta o meno un punto di flesso e argomenta la tua risposta. Determina poi le equazioni delle rette t_1 e t_2 tangenti al grafico di $f_2(x)$ nei punti in cui questo interseca l'asse x .
- Considera il triangolo T formato dalle rette t_1 e t_2 determinate al punto precedente e dall'asse x . Internamente a T considera la regione di piano S delimitata dall'asse x e dal grafico di $f_2(x)$. Determina il rapporto tra l'area di S e l'area di T .

Problema 2

La curva Γ in figura rappresenta il grafico della funzione integrale F , relativa al punto $x = 0$, della funzione f sull'intervallo $[-2, 2]$:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad \text{con } -2 \leq x \leq 2$$



In $x = -2$ e $x = 1$ ci sono due punti stazionari e le rette t_0 e t_B sono tangenti alla curva. Inoltre, è noto che la funzione f è derivabile in $[-2, 2]$ e che la tangente a Γ in D è parallela a t_B .

- a. Determina i valori di $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$. Dimostra che il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione F nell'intervallo $[-2, 2]$ e che il punto di ascissa $c = 0$ è uno dei punti la cui esistenza è garantita dal teorema. Dimostra con il teorema di Rolle che la funzione F ammette un punto di flesso nell'intervallo $[-2, 1]$.
- b. Sapendo che il punto D è l'unico flesso a tangente obliqua per F , traccia il grafico probabile della funzione $y = f(x)$, con $-2 \leq x \leq 2$. Supponi, anche nei punti successivi 3 e 4, che la funzione F sia, sull'intervallo considerato, una funzione polinomiale di quarto grado e determina l'espressione analitica delle funzioni $y = F(x)$ e $y = f(x)$.
- c. Calcola i seguenti limiti:

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} \left[\int_0^x f(t) dt - \int_0^{-1} f(t) dt \right]$$

$$\text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{-2x^2}$$

$$\text{c. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x |f(t)| dt}{(1-x)^2}$$

- d. Considera la funzione $g(x) = F(-x)$, per $-2 \leq x \leq 2$, e calcola l'area della porzione di piano delimitata dai grafici di F e di g e dalle rette $y = 6$ e $y = -2$.

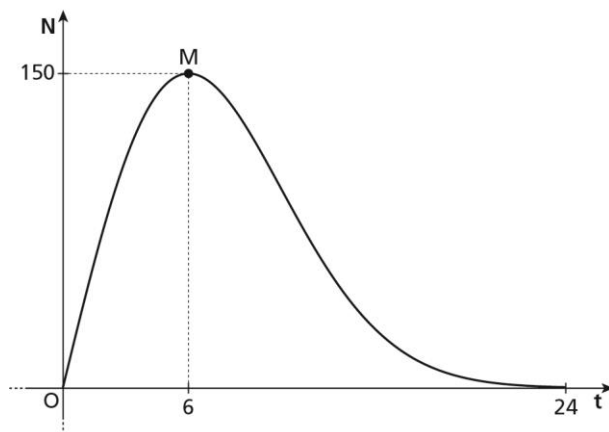
QUESITI

1. Qual è la probabilità che nel corso di un anno, cioè in 52 estrazioni, il numero 90 esca almeno tre volte sulla ruota del lotto di Firenze?
2. Data la funzione $f(x)$ definita in $\mathbb{R}$, $f(x) = e^x(2x + x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1, 2e)$.
3. Il trapezio isoscele $ABCD$ è circoscritto a una circonferenza di raggio r . La base maggiore AB è lunga il triplo della base minore CD . Determina l'ampiezza degli angoli del trapezio e il rapporto tra il raggio della circonferenza inscritta e la base minore.

4. Un negozio di abbigliamento ha aperto un nuovo sito di *ecommerce*. L'andamento del numero di accessi alla home page del sito nel giorno di lancio della piattaforma di *ecommerce* è modellizzato dal grafico in figura. Il tempo t è espresso in ore, mentre il numero N in migliaia di accessi. Determina per quali valori dei parametri reali e positivi a e b , la funzione

$$N(t) = at e^{-bt^2}, \quad \text{con } t \in [0; 24],$$

ha l'andamento in figura. Stima il numero di accessi per $t = 24$.

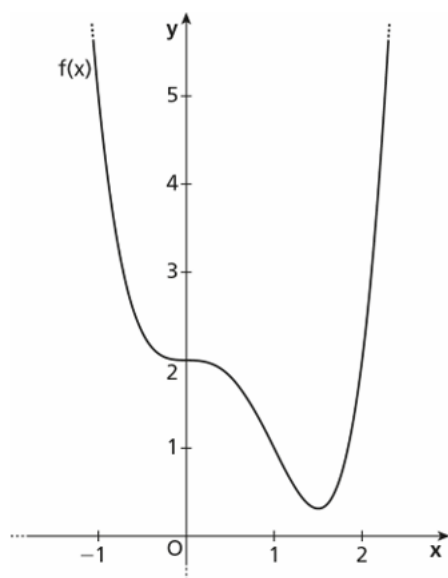


5. Determina per quali valori dei parametri a e b il grafico della funzione

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

presenta nel suo punto d'intersezione con l'asse y una retta tangente parallela alla retta di equazione $3x + 2y + 1 = 0$ e la funzione $f(x)$ è tale che $f''(x)$ è uguale a $f(x) + e^{-x}$.

6. In figura è rappresentato il grafico γ della funzione $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$.



Trova le tangenti inflessionali di γ .

7. Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$, nel primo quadrante ciascuna tangente alla parabola delimita con gli assi coordinati un triangolo. Determinare il punto di tangenza in modo che l'area di tale triangolo sia minima.

8. Verificare che la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di prima specie (“a salto”), mentre la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$$

ha una discontinuità di terza specie (“eliminabile”).

NOTA: Durata massima della prova: 6 ore.

Non è consentito lasciare l’Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.